

# FUNKCJA KWADRATOWA

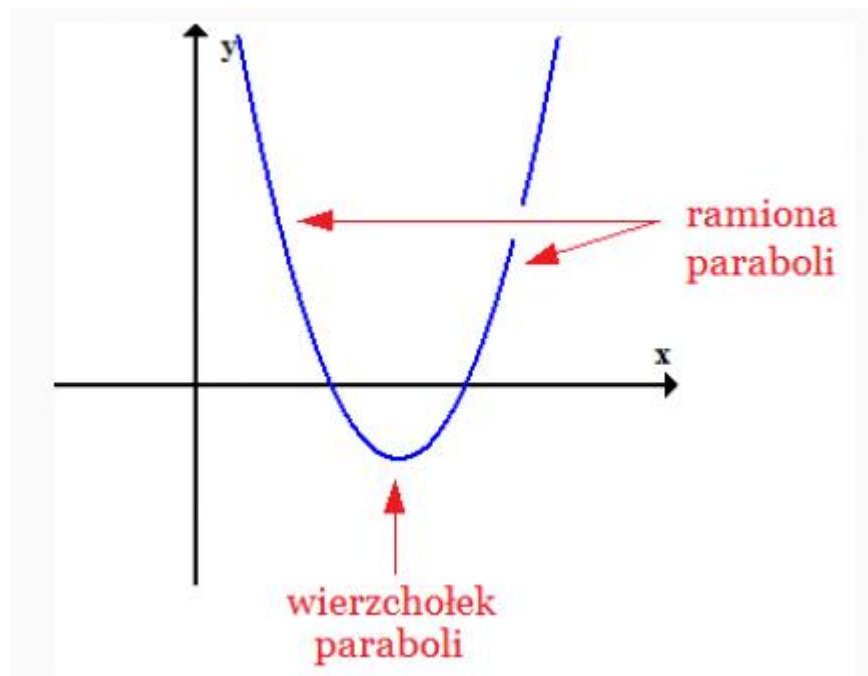
To funkcja, którą zapisujemy w postaci ogólnej:

$$y = a x^2 + b x + c$$
$$a \neq 0$$

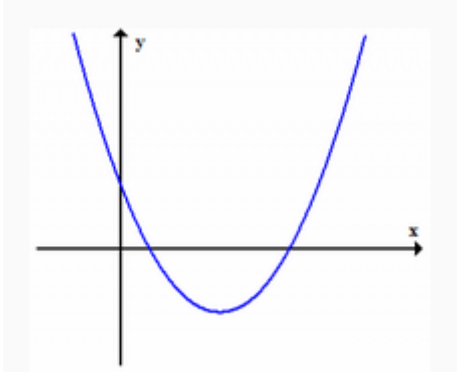
$$b \text{ i } c \in R$$

# Wykres

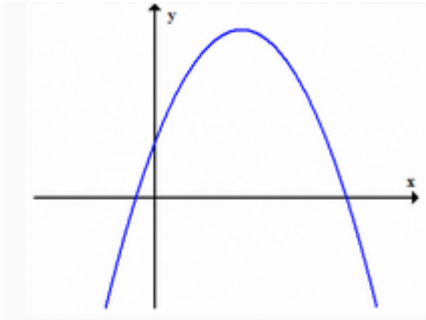
**Wykresem funkcji jest parabola!**



•ježeli  $a > 0$

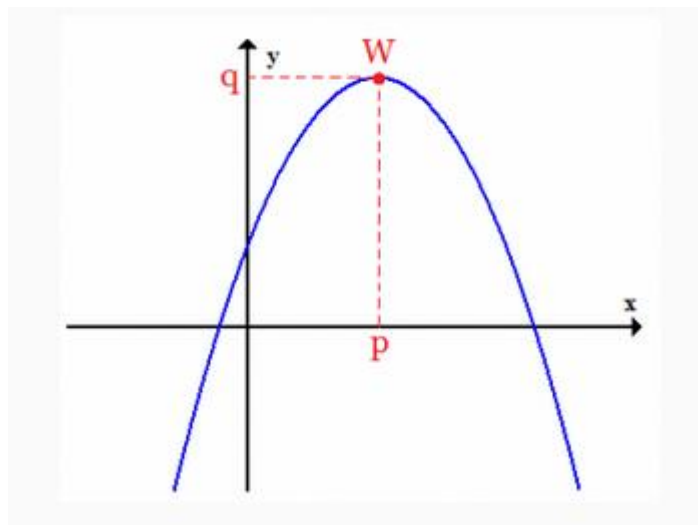


•ježeli  $a < 0$



**Wierzchołek** paraboli to **punkt**  
**paraboli o współrzędnych**

$$W=(p,q)$$



$$p = -\frac{b}{2a} \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

# POSTAĆ KANONICZNA FUNKCJI

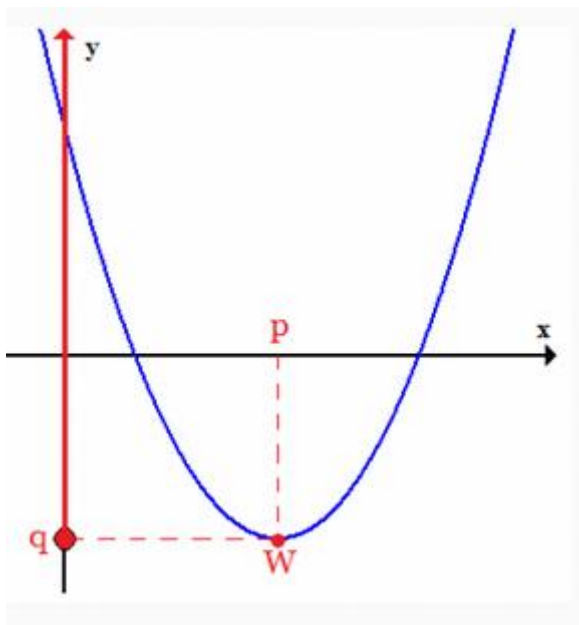
$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

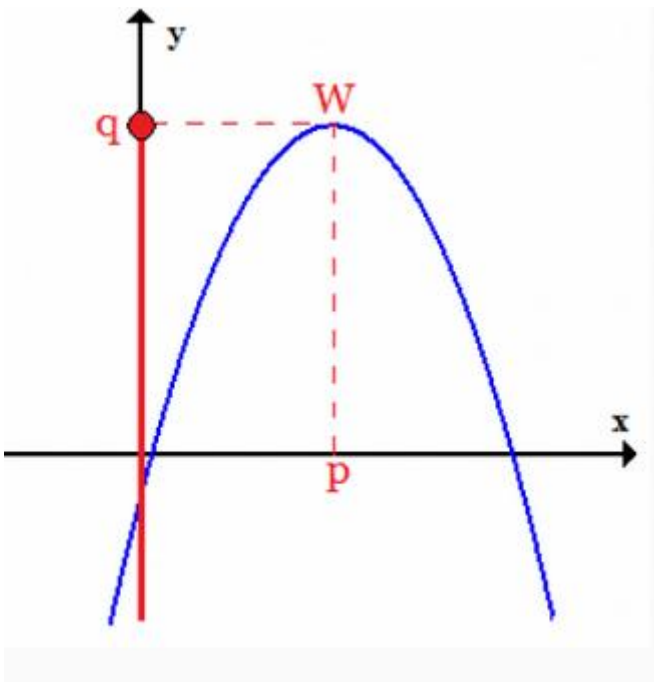
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

# ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI

$$a > 0 \quad y \in \langle q, +\infty \rangle$$



$$a < 0 \quad y \in (-\infty, q)$$





# NAJWIĘKSZA I NAJMNIEJSZA WARTOŚĆ FUNKCJI

- wyznaczenie wierzchołka
- obliczenie wartości funkcji na brzegach przedziału
- sporządzenie wykresu
- odczytanie z wykresu min i max funkcji

## ZADANIA

1. Do wykresu funkcji  
 $y = x^2 + x - 2$  należy punkt:

a)  $(-1, -4)$

b)  $(-1, 1)$

c)  $(-1, -1)$

d)  $(-1, -2)$

$$y = x^2 + x - 2$$

$$x = (-1) \quad y = (-1)^2 + (-1) - 2$$

$$y = 1 - 1 - 2 = (-2)$$

**$P=(-1,-2)$  odp.d) !!**

**2. Podaj zbiór wartości funkcji, wartość max lub min, przedziały monotoniczności funkcji, oś symetrii paraboli, ilość punktów wspólnych z prostą  $y = 2$**

**a)  $y = -2(x+1)^2 + 3$**

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$a = (-2) \quad p = (-1) \quad q = 3$$

**$a < 0$  ramiona w dół**

$a < 0 \quad y \in (-\infty, q)$

**a)  $y = -2(x+1)^2 + 3$**

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$a = (-2) \quad p = (-1) \quad q = 3$$

**$a < 0$  ramiona w dół**

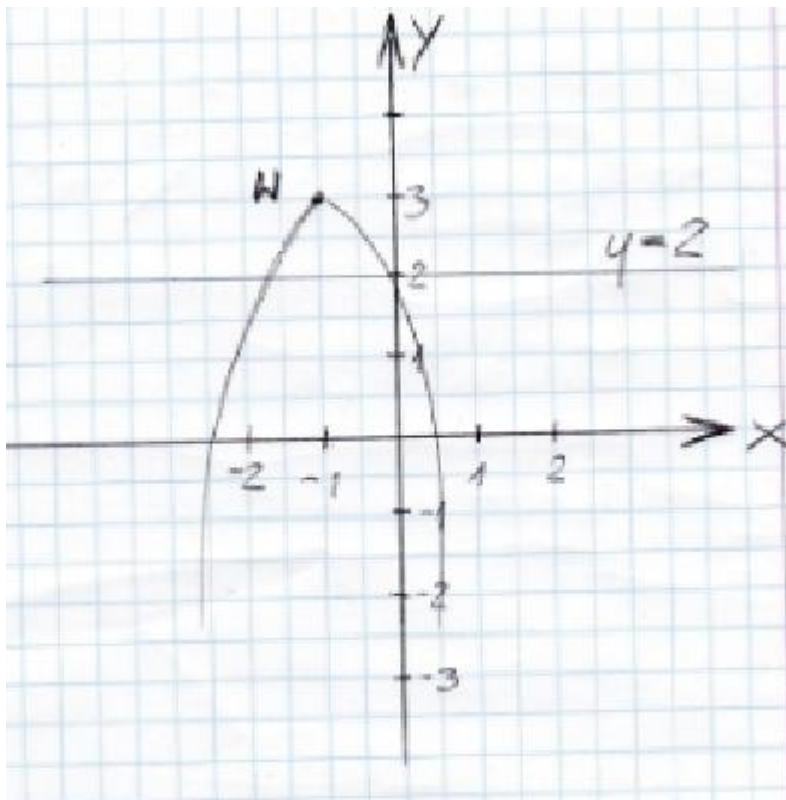
$a < 0 \quad y \in (-\infty, q)$

**$y \in (-\infty, 3 >$  wartości funkcji**

$y_{\max} = 3$       **wartość max**

**monotoniczność funkcji**

**monotoniczność funkcji**



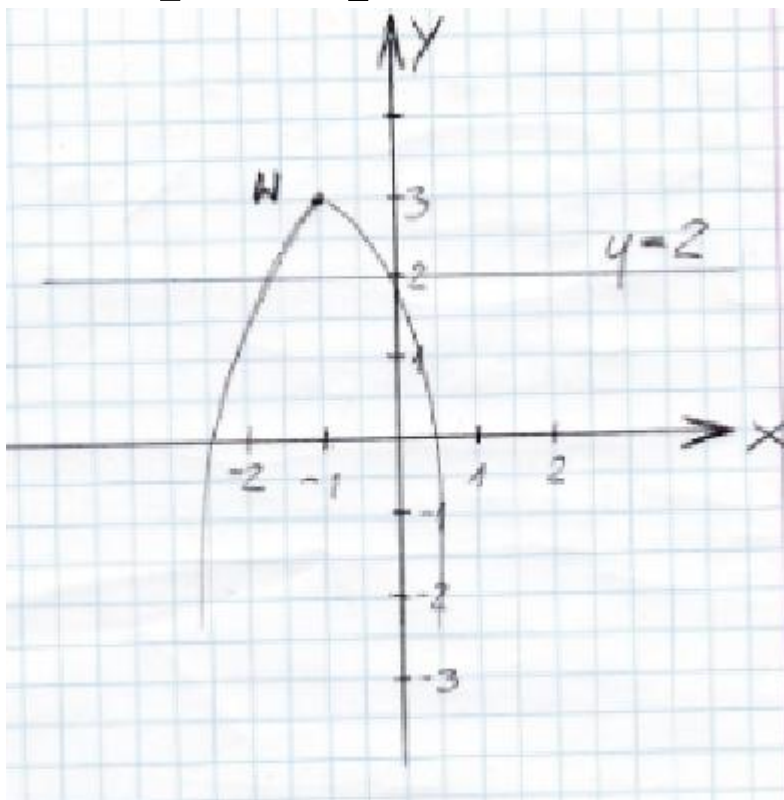
**funkcja rosnąca dla**  
 $x \in (-\infty, -1)$

**funkcja malejąca dla**  
 $x \in (-1, +\infty)$

**oś symetrii**

$$x = p \quad p = (-1)$$

$$\mathbf{x = (-1)}$$



**ilość punktów wspólnych z  
prostą  $y = 2$**

**Dwa punkty z prostą  $y=2$  !!**

$$\text{b) } y = 3(x-1)^2 + 2$$

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$a = 3 \quad p = 1 \quad q = 2$$

**$a > 0$  ramiona w górę**

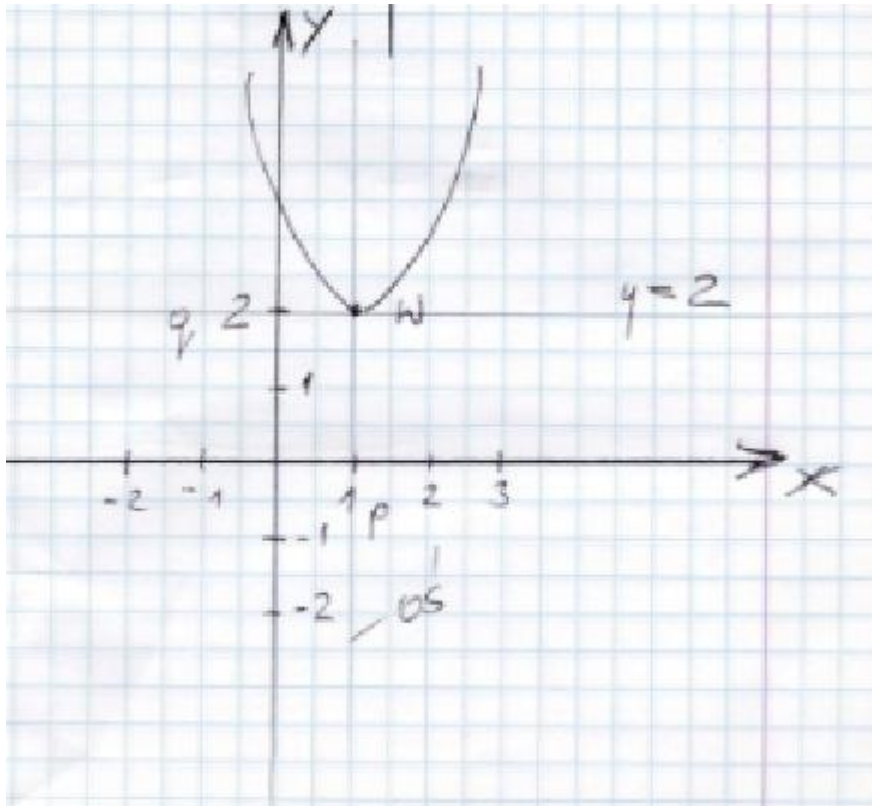
$y \in \langle 2, +\infty \rangle$  **wartości funkcji**

$y_{\min} = 2$  **wartość najmniejsza**

**monotoniczność funkcji**

**monotoniczność funkcji**





**funkcja rosnąca dla**  
 $x \in (1, +\infty)$

**funkcja malejąca dla**  
 $x \in (-\infty, 1)$

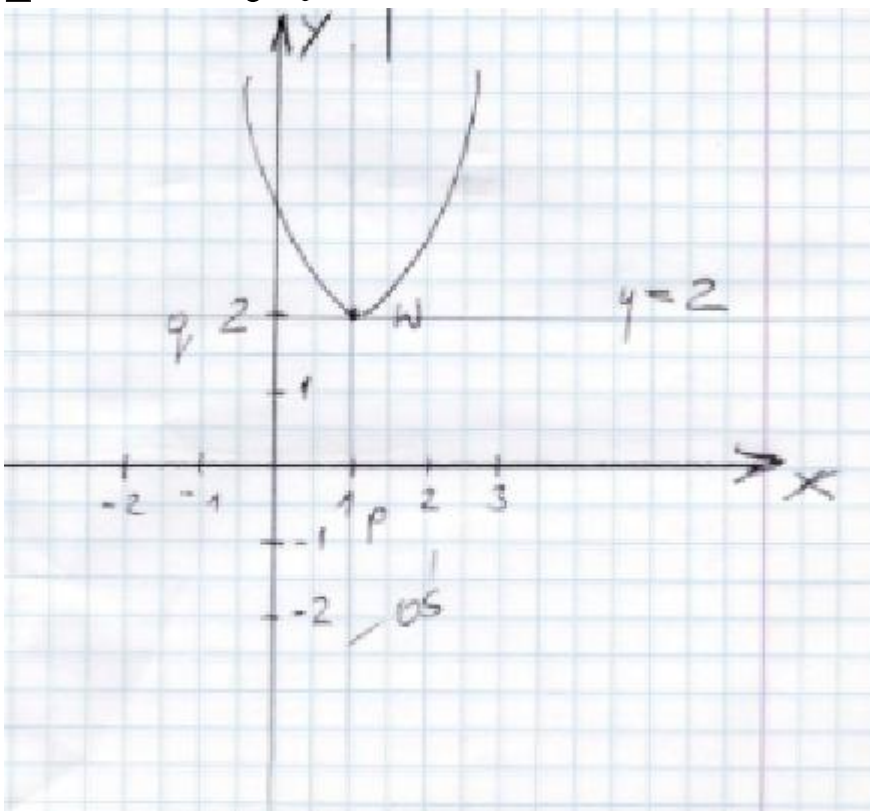
**oś symetrii**

$$x = p$$

$$p = 1$$

$$x = 1$$

**ilość punktów wspólnych z  
prostą  $y = 2$**



**ilość punktów wspólnych z  
prostą  $y = 2$   
jeden !!**

$$\text{c) } y = \frac{1}{2}(x - \Pi)^2 + 1$$

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$p = \Pi \quad q = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$a > 0$       **ramiona w górę**

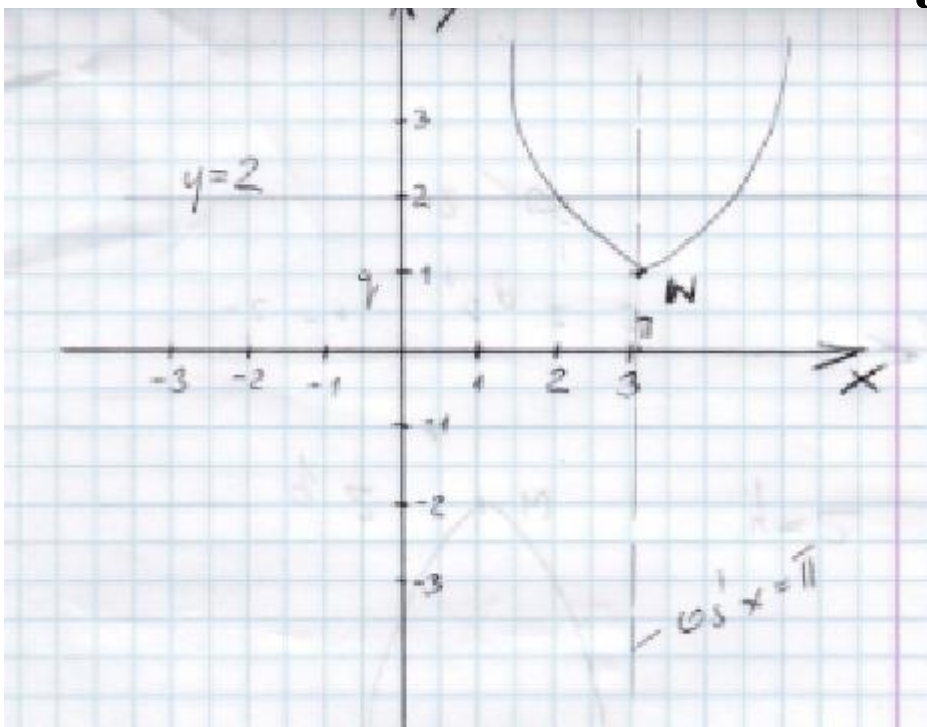
$a > 0$        $y \in \langle q, +\infty \rangle$

$y \in \langle 1, +\infty \rangle$       **wartości funkcji**

$y_{\min} = 1$       **wartość najmniejsza**

**monotoniczność funkcji**

**monotoniczność funkcji**



**funkcja rosnąca dla**

$$x \in (3, +\infty)$$

**funkcja malejąca dla**

$$x \in (-\infty, 3)$$

**oś symetrii**

$$x = \Pi$$

$$p = \Pi$$

$$x = \Pi$$

**3. Funkcję  $y = x^2 - 8x + 6$  zapisz w postaci kanonicznej**

$$y = x^2 - 8x + 6$$

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$y = (x-4)^2 - 16 + 6$$

$$y = (x-4)^2 - 10 \quad !!$$

**4. Wierzchołek paraboli funkcji  $y = -3(x+1)^2$  ma współrzędne:**

**a) (-1,0)**

**b) (0,-1)**

**c) (1,0)**

**d) (0,1)**

$$y = -3(x+1)^2$$

$$\mathbf{W=(p,q)}$$

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$y = -3(x+1)^2 + 0$$

$$a = (-3) \quad p = (-1) \quad q = 0$$

$$\mathbf{W = (-1, 0) !!}$$

$$\mathbf{W = (-1, 0) !!}$$

$$\mathbf{a) (-1, 0) \quad b) (0, -1)}$$

$$\mathbf{c) (1, 0) \quad d) (0, 1)}$$

**odp. a) !!**

**5. Suma współrzędnych wierzchołka paraboli**

**$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$  jest równa:**

**a) 2    b) -2    c) -4    d) 4**

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$$

$$a = 2 \qquad p = 1 \qquad q = 3$$



$$W=(p,q)$$

$$W = (1,3) \quad !!$$

$$1 + 3 = 4 \quad !!$$

$$W=(p,q)$$

$$W = (1,3) \quad !!$$

$$1 + 3 = 4 \quad !!$$

**a) 2    b)-2    c)-4    d)4**

**odp. d) !!**

**6. Dana jest parabola o równaniu**  
 $y = x^2 + 8x - 14$ .

**Pierwsza współrzędna wierzchołka wynosi:**

- a)  $x = (-8)$     b)  $x = (-4)$     c)  $x = 8$**   
**d)  $x = 4$**

$$y = x^2 + 8x - 14$$

$$y = (x+4)^2 - 16 - 14$$

$$y = (x+4)^2 - 30$$

$$p = (-4) \quad q = 30$$

$$p = (-4) \quad q = 30$$

- a)  $x = (-8)$     b)  $x = (-4)$     c)  $x = 8$**   
**d)  $x = 4$**

**odp. b) !!**

**7. Wierzchołek paraboli**  
 $y = x^2 + 4x - 13$  **leży na prostej:**

**a)  $x = (-2)$**

**b)  $x = 2$**

**c)  $x = 4$**

**d)  $x = (-4)$**

$$y = x^2 + 4x - 13$$

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = x^2 + 4x - 13 \quad p = ?$$

$$y = (x + 2)^2 - 4 - 13$$

$$y = (x + 2)^2 - 17$$

$$p = (-2)$$

$$p = (-2)$$

**a)  $x = (-2)$**

**b)  $x = 2$**

**c)  $x = 4$**

**d)  $x = (-4)$**

**odp. a) !!**

## 8. Zbiorem wartości funkcji

$$y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 6 \text{ jest?}$$

$$a = \left(-\frac{1}{3}\right) \quad q = 6$$

$$a < 0 \quad y \in (-\infty, q)$$

$$y \in (-\infty, 6) \quad !!$$

**9. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $y = x^2 - 4$  jest?**

$$y = x^2 - 4$$

$$y = (x-0)^2 - 4$$

$$a = 1 \quad q = (-4)$$

$$a > 0 \quad y \in \langle q, +\infty \rangle$$

$$y \in \langle -4, +\infty \rangle \quad !!$$

**10. Wskaż funkcję kwadratową, której zbiorem wartości jest przedział  $\langle -2, +\infty \rangle$ .**

$$y \in \langle -2, +\infty \rangle$$

$$y \in \langle q, +\infty \rangle \quad a > 0$$

$$a = 2 \quad q = (-2)$$

$$y = 2(x-0)^2 - 2 \quad \text{!! np.}$$

$$y = 2(x-5)^2 - 2$$

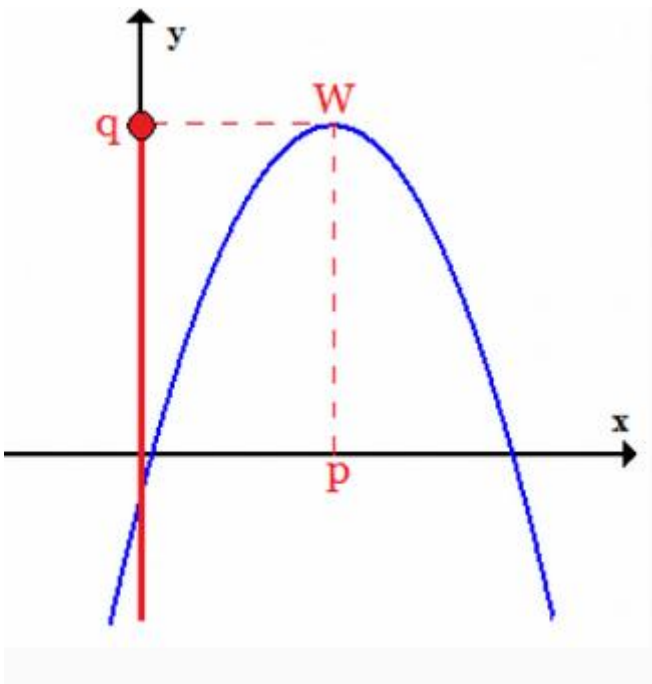


**11. Największą wartością funkcji kwadratowej  $y = -2(x+3)^2 - 4$  jest?**

$$y = -2(x+3)^2 - 4$$

$$a = (-2) \quad p = (-3) \quad q = (-4)$$

$$a < 0 \quad y \in (-\infty, q)$$



$$y_{\max} = q \quad q = (-4)$$

**Największą wartością funkcji kwadratowej jest  $y_{\max} = (-4)$  !!**

**12. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej  $y = 3(x-4)^2 + 5$  to?**

$$y = 3(x-4)^2 + 5$$

$$a = 3 \quad a > 0 \quad q = 5$$

$$y_{\min} = q \quad y_{\min} = 5$$

**Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej  $y_{\min} = 5$  !!**

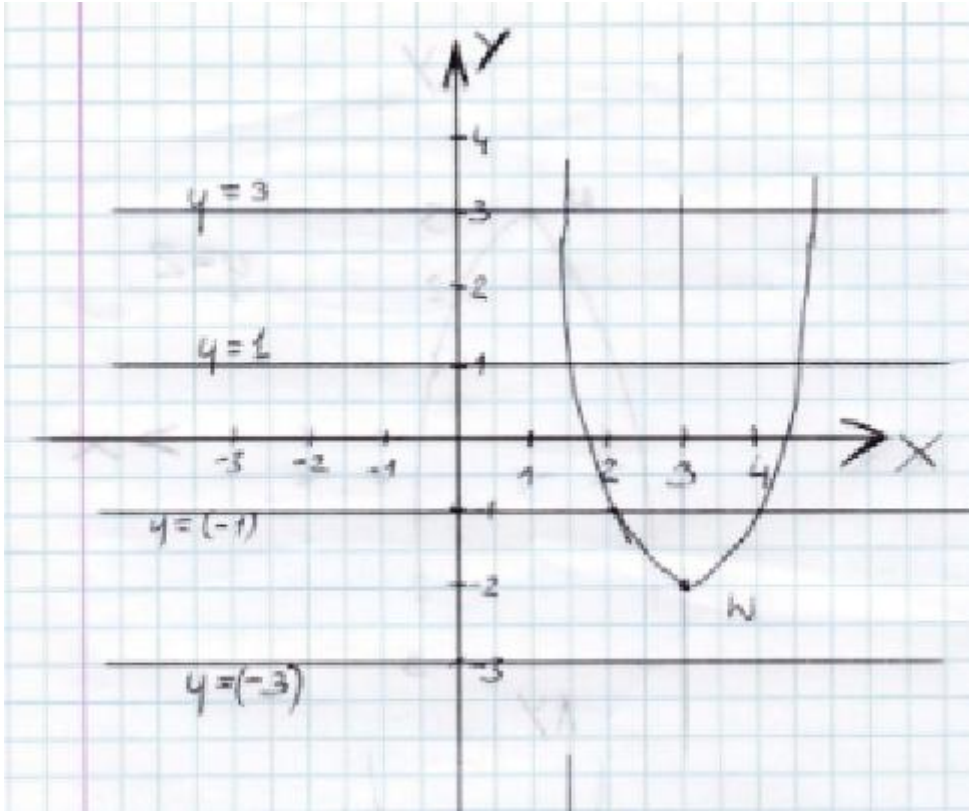
**13. Wykres funkcji kwadratowej  $y = (x-3)^2 - 2$  nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:**

- a)  $y = (-3)$       b)  $y = (-1)$**   
**c)  $y = 1$          d)  $y = 3$**

$$y = (x-3)^2 - 2$$

$$a = 1 \quad p = 3 \quad q = (-2)$$

$$a = 1 \quad p = 3 \quad q = (-2)$$



- a)  $y = (-3)$**       **b)  $y = (-1)$**   
**c)  $y = 1$**       **d)  $y = 3$**

**odp. a) !!**

**14. Wskaż równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli o równaniu  $y = x^2 - 4x + 2010$**

**a)  $x = (-2)$                       b)  $x = 2$**

**c)  $x = (-4)$                       d)  $x = 4$**

$$y = x^2 - 4x + 2010$$

**Oś symetrii to  $x = p$**

$$y = (x-2)^2 - 4 + 2010$$

$$y = (x-2)^2 + 2006$$

$$p = 2 \quad \mathbf{x=2}$$

$$p = 2 \quad \mathbf{x=2}$$

$$\mathbf{a) x=(-2)} \quad \mathbf{b) x=2}$$

$$\mathbf{c) x=(-4)} \quad \mathbf{d) x=4}$$

**odp. b) !!**

**15. Funkcja  $y = x^2 - a$  przyjmuje wartości ujemne dla:**

**a)  $a=4$**

**b)  $a=0$**

**c)  $a=(-1)$**

**d)  $a=(-7)$**

$$y = x^2 - a$$

$$y = x^2 - (-1) \quad y = x^2 + 1 \text{ **nie!**}$$

$$y = x^2 - (-7) \quad y = x^2 + 7 \text{ **nie!**}$$

$$y = x^2 - (0) \quad y = x^2 \quad \text{**nie!**}$$



$y = x^2 - 4$      $y = x^2 - 4$     **tak!!**

$y = x^2 - 4$      $y = x^2 - 4$     **tak!!**

**a) a=4**

**b) a=0**

**c) a=(-1)**

**d) a=(-7)**

**odp. a) !!**

## 16. Wykresem funkcji

$y = 2x^2 + bx + c$  jest parabola,  
której wierzchołkiem jest  
punkt  $W=(4,0)$ . Oblicz wartości  
współczynnika  $b$  i  $c$ .

$$y = 2x^2 + bx + c \quad b = ? \quad c = ?$$

$$W=(4,0) \quad p = 4 \quad q = 0 \quad a = 2$$

$$y = 2(x-4)^2 + 0$$

$$2x^2 + bx + c = 2(x-4)^2 + 0$$

$$2x^2 + bx + c = 2(x^2 - 8x + 16) + 0$$

$$2x^2 + bx + c = 2x^2 - 16x + 32$$

$$a = 2 \quad b = (-16) \quad c = 32 \quad !!$$

**17. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej:**

**a)  $y = 2x^2 - 5x + 3$  w przedziale  $\langle -1, 2 \rangle$**

- wyznaczenie wierzchołka**
- obliczenie wartości funkcji na brzegach przedziału**
- sporządzenie wykresu**
- odczytanie z wykresu min i max funkcji**

a)  $y = 2x^2 - 5x + 3$  w przedziale  
 $\langle -1, 2 \rangle$

$$a = 2 \quad b = (-5) \quad c = 3$$

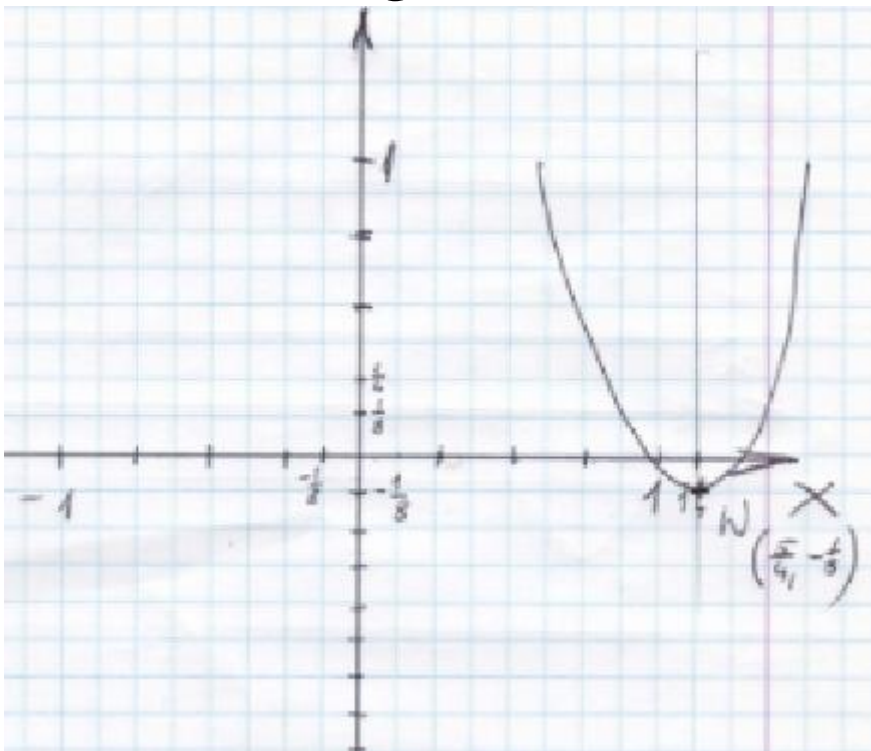
$$p = -\frac{b}{2a} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$W = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \\ \Delta &= 1 \end{aligned}$$

$$p = \frac{5}{4} \quad q = \left( -\frac{1}{8} \right) \quad W = \left( \frac{5}{4}, -\frac{1}{8} \right)$$

$$W = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$



$$y_{\min} = -\frac{1}{8}$$

$$x \in \langle -1, 2 \rangle$$

- obliczenie wartości funkcji na brzegach przedziału

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 3$$

$$f(-1) = 2 + 5 + 3 = 10$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3$$

$$f(2) = 8 - 10 + 3 = 1$$

$$y_{\min} = -\frac{1}{8}$$

$$y_{\max} = 10 \quad !!$$

**17. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej:**

**b)  $y = -2(x-4)^2 + 3$  w przedziale  $\langle 2, 5 \rangle$**

$$y = -2(x-4)^2 + 3$$

$$p = 4 \quad q = 3 \quad a = (-2)$$

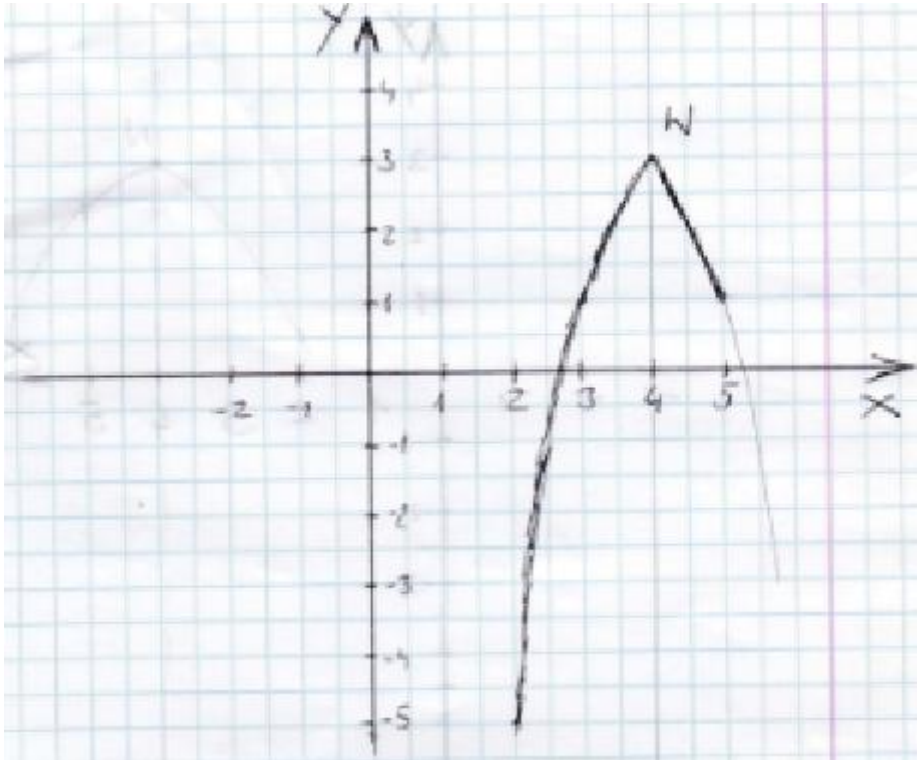
$$W=(p,q) \quad W=(4,3) \quad a < 0$$



$$W=(p,q)$$

$$W=(4,3)$$

$$a < 0$$



$$y_{\max} = 3$$

- obliczenie wartości funkcji na brzegach przedziału

$$x \in \langle 2, 5 \rangle$$

$$y = -2(x-4)^2 + 3$$

$$y_{\max} = 3$$

$$x \in \langle \mathbf{2, 5} \rangle$$

$$y = -2(x-4)^2 + 3$$

$$f(2) = -2(2-4)^2 + 3 = -2 \cdot 4 + 3$$

$$f(2) = (-5)$$

$$f(5) = -2(5-4)^2 + 3 = -2 \cdot 1 + 3$$

$$f(5) = 1$$

$$y_{\max} = 3$$

$$y_{\min} = (-5) \quad !!$$